El Método del Camino Crítico y la Programación de Actividades

Por: Álvaro Lecompte

Resumen

Mediante un ejemplo sencillo se presentan los modelos matemáticos para la programación de actividades mediante los grafos dirigidos. En el dígrafo de actividades, la preparación de la agenda óptima se reduce a encontrar los caminos y tiempos críticos, los cuales se calculan eficientemente a partir del orden subyacente dado por la relación de precedencia de las actividades. Esta metodología utilizada ampliamente en la industria y la ingeniería empieza a popularizarse por los programas de software que la llevan a la oficina y la casa, por lo que es previsible que pronto pasará a ser algo tan corriente como las hojas electrónicas.

Introducción

La programación matemática se basa en modelos matemáticos para representar actividades humanas, a partir de los cuales se formula la pregunta de cómo realizar de forma más efectiva dichas actividades. La respuesta se convierte entonces en una posible forma de ejecutar la actividad, influyendo decisivamente en la toma de decisiones. La importancia de esta teoría en la industria e ingeniería ha venido creciendo a pasos agigantados desde la Segunda Guerra Mundial y en los años posteriores. Su aportación a la economía ha sido invaluable desde entonces, permitiendo el ahorro de los recursos y la generación de riqueza, en especial en los proyectos complejos que conllevan el uso de múltiples plantas industriales o una cadena de producción extensa. Con la popularización de las computadoras y de los programas de software utilitarios durante las dos últimas décadas, la práctica de la teoría se ha expandido, permitiendo a cualquier individuo decidir rápidamente sobre las mejores opciones para todo tipo de actividades y proyectos, desde negocios o trabajos hasta los proyectos personales.

Entre los múltiples ejemplos de la programación matemática, se destaca el método del camino crítico (CPM, por sus siglas en inglés) porque, a la vez que determina los tiempos y/o costos mínimos de un proyecto, permite establecer el itinerario óptimo para llevarlo a cabo. La buena programación de actividades, además de la satisfacción del trabajo realizado efectivamente, crea un ambiente de trabajo donde cada parte conoce sus responsabilidades particulares en cada momento, los recursos necesarios y su disponibilidad, y las fechas límites en que debe finalizar las actividades. El ahorro en tiempo y/o dinero permite liberar estos dos recursos valiosos para otras actividades de la vida humana.

Con frecuencia, las matemáticas se entienden como una ciencia de operaciones abstractas y complicadas, sin mucho valor práctico. Pero esta teoría, por el contrario, además de proveer el marco conceptual para la mejor planificación lleva rápidamente a interpretaciones geométricas o visuales de las actividades. Los dígrafos de actividades no solamente facilitan el cálculo efectivo de costos e itinerarios, sino que contribuyen a la comprensión holística de los proyectos.

Ejemplo de un proyecto y sus actividades

Para una explicación concreta, usaremos como ejemplo un proyecto sencillo con una serie de actividades. A medida que avance la presentación, podemos ir abstrayendo los conceptos generales. Suponga que se tiene el proyecto de vender la casa. Entre las actividades más importantes se han identificado las siguientes: en primer lugar, desocupar la casa; en segundo, llevar a cabo varias reparaciones que mejoran las posibilidades de una venta rápida y a mejor precio. En paralelo, se puede establecer el precio de venta, para lo cual se pide la tasación y se realiza una investigación sobre los precios de venta de propiedades similares en el área. La venta se puede anunciar en la prensa local y/o se debe colocar un aviso de venta. Luego, una vez aparezcan los clientes interesados, hay que disponer de tiempo para mostrar la casa. Si un cliente se interesa en serio, se debe facilitar a esta persona la información necesaria para que inicie la financiación de la compra y pueda completar el proceso legal de compra de la propiedad. En lo que se completa la financiación, conviene pactar una opción de compra, para suspender las gestiones con otros clientes. Si el proceso tiene éxito, se acabó la venta, pero si se interrumpe, será necesario reiniciar el proceso de mostrar la casa y conseguir otro cliente. Si esto ocurre, posiblemente se deba replantear el precio de venta. La limpieza de la propiedad y los anuncios deben mantenerse constantes durante el proceso, para que la propiedad mantenga su valor y atracción.

¿Cómo se convierte esta descripción de actividades en un modelo matemático? Podemos tener varios objetivos diferentes en mente. De uno a otro, pequeños cambios en el modelo nos llevan a distintas planificaciones. Un primer objetivo puede ser el de vender la casa lo más rápido posible. Otro podría ser vender la casa en un tiempo razonable, pero manteniéndose dentro de un presupuesto de gastos limitado. Por ejemplo, las reparaciones se pueden hacer en menos tiempo si se paga más a quien las hace, o conseguir un cliente puede ser más rápido si se anuncia en la prensa o se acude a un “realtor”. Si desea gastar poco en la gestión de venta, entonces esta puede tardar más. Como tiempo es dinero, un tercer objetivo podría ser maximizar la ganancia total, tomando en cuenta el costo del tiempo. En este caso habría que evaluar también el costo de mantener la casa vacía sin venderla, ya que puede ser porque todavía se pague una hipoteca y se puede evitar ese pago si se baja el precio y se vende antes. La solución óptima será algún punto intermedio.

Todas estas posibilidades se pueden modelar matemáticamente. Para ilustración iremos con la primera, la de minimizar el tiempo de venta. Con pequeñas variantes el modelo sirve para las otras. Los costos y tiempos de cada parte del proyecto en este primer caso se consideran fijos, sin tomar en cuenta los imprevistos. En la vida real estos tiempos y costos pueden ser variables al azar, pero en el modelo se usa un tiempo razonable fijo (tiempo usual). El costo también es fijo y no es necesario tomarlo en cuenta. Para completar el modelo, debemos indicar el orden de las actividades, concretamente, cuales deben estar concluidas previo al inicio de cada nueva actividad.

Para la venta de la casa, por ejemplo, podríamos tener la situación descrita en la Tabla 1.

Tabla 1

Actividades para la venta de una casa

Actividad	**Tiempo**	**Predecesoras inmediatas**
A. Desocupar	7 días	Ninguna
B. Reparaciones	15 días	A
C. Tasación e Investigación	7 días	A
D. Precio de venta	1 día	C
E. Anunciar y mostrar	30 días	B, D
F. Cliente y conceder opción	5 días	E
G. Completar financiación	30 días	F
H. Mantenimiento 1	1 día	A
I. Mantenimiento 2	1 día	H, E
J. Mantenimiento 3	1 día	I, G
K. Firma de venta	1 días	G

Desde este punto de vista, un proyecto consiste de una lista de actividades, cada una de las cuales tiene una lista de actividades predecesoras inmediatas y tarda un tiempo conocido. El objetivo en este primer modelo consiste en preparar una agenda de actividades que permita realizar el proyecto completo en el menor tiempo posible, donde cada actividad se realiza posteriormente a sus predecesoras. Las actividades que no son requisitos previos entre sí y ya tienen sus requisitos completos se puedan realizar simultáneamente.

Grafos de actividades

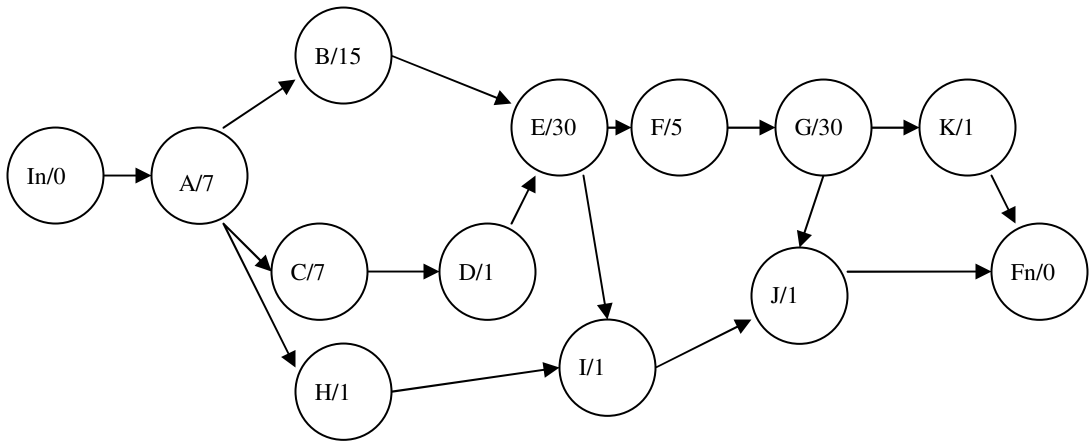
El problema se puede representar visualmente mediante un "grafo dirigido". Un grafo (simple) es un dibujo formado por puntos llamados nodos y líneas entre ellos llamadas aristas. Cuando las líneas tienen dirección definida, las dibujamos como flechas y el grafo se dice dirigido o dígrafo. En los grafos simples tenemos como máximo una arista o flecha (tomando en cuenta la dirección) entre cada par de nodos. Un grafo no dirigido se puede ver como uno dirigido, donde cada arista tiene doble dirección. El dibujo del grafo no es esencial, lo importante son los dos conjuntos: el de nodos y el de líneas, donde estas últimas se pueden tomar como parejas (ordenadas o no) de nodos. Las líneas constituyen una relación binaria entre (simétrica o no) entre los nodos del grafo.

Hay dos formas diferentes, "duales", de formar un grafo de actividades a partir de la lista de las mismas. En la primera, cada actividad se representa mediante un vértice o nodo del grafo, mientras cada relación de precedencia se representa por una flecha. El tiempo que tarda cada actividad es un valor (una función) dependiente del nodo respectivo. En la segunda forma, cada actividad se indica mediante una flecha, mientras cada nodo representa un evento del tiempo donde finaliza un grupo de actividades. El tiempo de cada actividad es ahora una función o "peso" de cada flecha.

La primera forma se ve directa a partir de la relación de precedencia. La segunda tiene la ventaja de trasformar el problema en uno de "optimización en redes", los cuales de forma genérica representan la mayor parte de los problemas de optimización de la programación matemática. Sin embargo, en este segundo método los nodos no son evidentes y es necesario un trabajo previo para identificarlos. También puede ser necesaria la introducción de actividades "dummies", que no representan nada, para mantener las relaciones de precedencia sin que se formen lados "paralelos". La elección de la representación no afecta esencialmente el planteamiento del problema ni el algoritmo de solución, por lo que en este trabajo usaremos la primera forma.

Para completar el grafo, conviene introducir la actividad de "Inicio", la cual no tiene predecesoras y su duración es cero, y la actividad de "Fin", la cual no tiene sucesoras y tampoco duración. Inicio precede a todas las actividades que no tenían predecesoras, mientras Fin es precedida por las actividades que no tenían sucesoras. Las listas de precedencia no pueden contradecirse entre sí. Más tarde veremos cuáles serán las condiciones para evitar las contradicciones.

Figura 1



Resumiendo, vamos a modelar el proyecto mediante un dígrafo simple, donde cada actividad corresponde a un nodo y cada relación de precedencia inmediata a una flecha dirigida que va del predecesor a la actividad. El tiempo de cada actividad es un "peso" de cada nodo. La Figura 1 presenta el dígrafo de nuestro ejemplo.

Este es un grafo sencillo, donde visualmente podemos identificar el orden en que se pueden realizar las actividades. A simple vista, el "camino crítico" de este grafo es la sucesión de actividades In, A, B, E, F, G, K, Fn. Este camino tarda 88 días, que será el tiempo mínimo para completar el proyecto. Las otras actividades pueden hacerse en paralelo y tienen un poco de margen de tiempo. En proyectos complejos la visualización puede ser difícil, al menos inicialmente. Una vez se ordenan las actividades se puede lograr un mejor dibujo del grafo.

El algoritmo llamado "Método del Camino Crítico" (CPM, por las siglas en inglés) sirve para encontrar el camino que toma más tiempo en un grafo de actividades. El tiempo del camino crítico será el tiempo mínimo para completar el proyecto. De hecho, el algoritmo CPM permite también calcular el tiempo mínimo en que se puede comenzar y el tiempo máximo para terminar cada actividad, sin retrasar todo el proyecto. Esto permite establecer la agenda o calendario de actividades.

Antes de examinar el problema matemático que se plantea, veamos que se puede hacer en las otras variantes del problema. En estas versiones cada actividad, digamos A_i, tiene un costo, el cual depende del tiempo en que se realiza la actividad: $C_i = f_i(t_i)$, donde

t_i es el tiempo que toma A_i. Como funciones para los costos, se suele asumir que cada actividad tiene cierto costo usual cu_i, si se hace en un tiempo usual tu_i. Si se desea hacer en menos tiempo, cada día de menos tiene un costo adicional r_i. El tiempo usual es como un tiempo máximo. Además, se puede introducir un tiempo mínimo tm_i, del cual físicamente no se puede bajar la duración de la actividad. Entonces, el tiempo t_i que tarda la actividad A_i es una variable, sujeta a:

$$tm_i \leq t_i \leq tu_i,$$

Con costo:

$$c_i = cu_i + r_i (tu_i - t_i)$$

Esta es una función lineal en el intervalo indicado de la variable independiente.

La representación gráfica de esta versión del problema es la misma anterior, pero el tiempo de cada actividad ahora no está determinado. Para determinar el tiempo se procede según el objetivo. Si se busca el tiempo mínimo para completar el proyecto, manteniendo el costo total dentro de un límite, se puede empezar por el cálculo del camino crítico usando los tiempos usuales. Luego, si el costo del proyecto está por debajo del límite, podemos bajar este tiempo bajando el tiempo de las actividades críticas, donde sea menos costoso primero. Este proceso se continúa mientras no se exceda el presupuesto de gastos.

Si el objetivo es vender al costo mínimo, sin que el tiempo exceda de un límite, entonces podemos empezar calculando los caminos críticos con los tiempos mínimos. Si el tiempo total está por debajo del límite, las actividades críticas más costosas se pueden relajar en tiempo, para bajar su costo. Al final, todas las actividades no críticas se relajan todo lo sea posible sin que pasen a ser críticas.

Finalmente, si el objetivo es la máxima ganancia considerando el costo en dinero del tiempo total del proyecto, adicional a los costos de cada actividad, se puede proceder como en el primer caso, partiendo de los caminos críticos con los tiempos usuales. Si se bajan los tiempos de las actividades críticas suben los costos de estas actividades pero baja el costo del tiempo total. Mientras la ganancia en el costo del tiempo supere la perdida en el costo de la actividad se puede seguir bajando el tiempo, hasta lograr un punto óptimo.

Esta versión del problema, así como las dos anteriores, se manejan mejor en la forma dual mencionada inicialmente, transformando el problema a uno de optimización en redes. Entonces, el problema se puede resolver con el algoritmo usual de optimización lineal, el método "simplex", para el cual existen programas de software incluso en los programas de hojas electrónicas.

Sin embargo, una vez se encuentra la solución óptima, conviene presentarla en la forma de caminos críticos, ya que con frecuencia los costos no son fáciles de determinar y son quizás estimados o pueden ser "negociados". En este caso, lo conveniente es reconocer las actividades críticas, para reducir sus tiempos mediante procesos de negociación alternos del costo de estas reducciones.

En algunas áreas de aplicación del método, como en los proyectos de construcción, se suelen incluir restricciones adicionales. Por ejemplo, ciertas actividades pueden requerir el mismo equipo o el mismo personal. Si se desean realizar en paralelo se necesitará contratar equipo o personal adicional, con sus costos correspondientes. Este tipo de restricciones modifica dinámicamente las relaciones de precedencia. Con la ayuda del computador, el gerente de proyectos puede ir optimizando el uso de sus recursos para minimizar los costos totales de su empresa, que trabaja posiblemente en varios proyectos simultáneos. La esencia del problema sigue siendo la misma: encontrar los caminos críticos en un dígrafo de actividades.

Dígrafos ordenados y el orden topológico.

Como se puede visualizar en la Figura 1, un dígrafo de actividades tiene una estructura subyacente: no existen caminos dirigidos cerrados, esto es, caminos que salen y llegan al mismo punto. Se dice que es un grafo acíclico. Además, como las flechas representan precedencias inmediatas, si A -> B -> … -> C, entonces no debe existir A -> C. Viceversa, si tenemos un dígrafo simple acíclico y sin atajos de un paso, podemos pensar que se trata de cierto grafo de actividades. Si se usa la representación dual, donde las actividades son flechas, tampoco hay caminos cerrados y el nodo inicial de cada actividad debe ser el terminal de sus predecesoras, excepto quizás por las actividades "dummies" puestas para evitar flechas paralelas. Ahora, no es evidente a partir de la listas de precedencia determinar si el grafo es acíclico o no. Para esto hay que completar el proceso que sigue y ver si podemos listar las actividades en el orden que describimos.

Las flechas determinan un orden parcial subyacente. Decimos que el nodo A antecede a B, $A < B$, si existe algún camino dirigido de A a B. La relación es la extensión de la de precedencia, la cual es la antecedencia inmediata. Esta relación es estrictamente antisimétrica, por la ausencia de caminos dirigidos cerrados, y es transitiva, por su misma definición y la composición de caminos. Este orden se conoce como el orden topológico del grafo. En el grafo dual la relación de orden entre las actividades, que son flechas, se lleva también a los nodos del grafo.

La primera fase del Método de Caminos Críticos es la reconstrucción ordenada de la lista de actividades, de modo que cada actividad A_i aparezca en la lista luego de sus antecesoras. En otras palabras, obtener unos subíndices tales que: si $A_i < A_j$ entonces $i < j$. Esta lista no es única, ya que el orden del grafo no es un orden total y cualquier lista con esta propiedad sirve igual.

Inicialmente, cuando se prepara la lista de actividades estas no necesariamente van a estar ordenadas por la relación de antecedencia. Si la lista se entra desordenada, debemos contar con algún método para ordenarla. Puesto que el punto de partida del orden topológico son las listas de precedencias, el algoritmo de ordenación debe basarse en ellas.

Para ser más concretos, la lista ordenada se empieza a preparar a partir del vértice inicial In y se establece una lista Q de las actividades que todavía no están ordenadas, excluyendo la actividad In, la cual ya ha sido ordenada. Luego, mientras haya actividades en Q, se toma una de ellas, siguiendo su orden de lista, y se verifica si todas sus predecesoras ya fueron ordenadas, es decir si ya salieron de Q. En caso positivo, esta actividad se coloca de última en la lista de orden, se saca de Q y se repite el proceso empezando por el principio de Q; en caso negativo pasamos a la siguiente actividad en Q y se repite el proceso de chequear si todas sus predecesoras ya están ordenadas.

Este algoritmo puede tener problemas si alguna de las listas de predecesoras contiene información contradictoria. Se espera que en cada paso del mismo haya alguna actividad en Q cuyas predecesoras ya estén todas ordenadas. Si por error se omite alguna actividad en una de las listas de precedencia, entonces puede ocurrir que el algoritmo llegue al final de Q sin encontrar una actividad para ser ordenada o, también, que alguna actividad sea colocada fuera de lugar. Igualmente, si se coloca alguna actividad de más en una lista de precedencia, entonces esa actividad puede caer fuera de lugar. Estos errores no son detectables fácilmente y es mejor revisar las listas de precedencia cuidadosamente al principio.

En un modelo ya ordenado, la introducción a último momento de una actividad no contemplada o el cambio de las predecesoras por alguna restricción de equipo o personal, puede alterar el orden las actividades. La nueva actividad debe insertarse antes de todas sus sucesoras inmediatas y después de todas sus predecesoras. Como necesitamos saber cuáles son sus sucesoras, para incluir la nueva actividad en las listas de predecesoras de estas, ambas listas deben estar disponibles.

Lo más práctico para los programadores es conservar la lista original de actividades, aunque esté desordenada, y preparar una lista de índices del nuevo orden. De esa forma no es necesario redefinir las posiciones de los elementos de las listas de precedencia en cada reubicación. La ordenación subyacente queda escondida entonces en esa tabla de índices, mientras en la tabla original no vemos ninguna alteración. De ahora en adelante suponemos que el orden de la lista de actividades responde al orden del grafo.

Observe que este orden no depende de los "pesos" en tiempo de los nodos o de los costos. Solamente es consecuencia de las relaciones de precedencia. Viceversa, dado un orden parcial estricto en un conjunto finito, podemos representar la relación por medio de flechas entre los elementos. Por la propiedad antirreflexiva del orden parcial, este grafo no puede tener caminos cerrados. Si eliminamos las flechas redundantes (los atajos de un paso), podemos llegar a las listas de precedencia inmediatas: A precede a B, si A<B y no existe C con A ->C ->B. El dígrafo resultante se puede ver entonces como un dígrafo de actividades. En otras palabras, las listas de precedencia contienen la información mínima para reconstruir el orden topológico de las actividades.

En la representación mediante el grafo dual, donde las actividades son flechas, los nodos se van creando a partir de esta lista ordenada de las actividades, por lo que el algoritmo de ordenación es aún más esencial.

Tiempos críticos y el camino crítico.

Procediendo ahora con la lista ordenada, para cada nodo se puede calcular su tiempo crítico de iniciación TCI y su tiempo crítico de finalización TCF, por medio de:

$$TCI(In) = TCF(In) = 0 \quad y$$

$$TCI(A_k) = Max\ \{TCF(A_j) \mid \text{donde } A_j \text{ es predecesor inmediato de } A_k\}$$

$$TCF(A_k) = TCI(A_k) + t_k, \text{ para } k > 0$$

Al llegar al nodo A_k, ya los tiempos de todos sus predecesores han sido calculados, por lo que el máximo está bien definido. El tiempo TCI corresponde al tiempo mínimo para iniciar la actividad respectiva, medido desde la actividad de inicio, mientras TCF es el tiempo mínimo para completarla.

En nuestro ejemplo, la tabla de tiempos críticos se indica en la Tabla 2, columnas 2 y 3. Los tiempos TCI y TCF fácilmente se convierten en días de calendario para la agenda. Si se desea seguir en detalle el camino crítico, el antecesor crítico de cada nodo es aquel que realiza el valor del máximo en la fórmula anterior para TCI. Este antecesor crítico se puede guardar en otra columna.

En las actividades que no son críticas, también puede ser conveniente el cálculo del tiempo más tarde en que pueden ser iniciadas TTI, el cual se acompaña del tiempo más tarde en que pueden ser finalizadas TTF, ambos tiempos se calculan desde el momento inicial.

Para este cálculo, la lista de atrás hacia delante:

$$TTF(Fn) = = TTI(Fn) = TCF(Fn)$$

$$TTF(A_j) = Min\{TTI(A_k) \mid A_j \text{ es predecesor inmediato de } A_k\} =$$

$$= Min\{TTI(A_k) \mid A_k \text{ es sucesor inmediato de } A_j\}$$

$$TTI(A_j) = TTF(A_j) - t_j$$

Donde j empieza por el último valor y va bajando. Esta vez sabemos que los sucesores inmediatos de A_k se encuentran debajo de esta en la lista, pero no tenemos una lista explícita de los mismos. La forma eficiente del cálculo consiste en ir formando la lista de sucesores inmediatos a medida que se regresa en la lista: si A_j está en predecesores de A_k entonces cuando estamos visitando el nodo A_k se va marcando A_k dentro de los sucesores de A_j. Al llegar a A_j ya deben estar marcados todos sus sucesores. Estos cálculos también se han incluido en la Tabla 2.

Tabla 2

Cálculos de tiempos críticos para iniciar y para finalizar, antecesores críticos, sucesores, tiempos para iniciar y finalizar no críticos y sucesores

Actividad	TCI	TCF	Ant	Sucs	TTI	TTF	Suc
A. Desocupar	0	7	In	B, H	0	7	B
B. Reparaciones	7	22	A	E	7	22	E
C. Tasación	7	14	A	D	14	21	D
D. Precio de venta	14	15	D	E	21	22	E
E. Anunciar, mostrar	22	52	B	G, I	22	52	G
F. Cliente y opción	52	57	E	G	52	57	G
G. Completar finan.	57	87	F	K	57	87	K
H. Mantenimiento 1	7	8	A	I	84	85	I
I. Mantenimiento 2	52	53	E	J	86	87	J
J. Mantenimiento 3	87	88	G	Fn	87	88	Fn
K. Firma de venta	87	88	G	Fn	87	88	Fn

En este ejemplo notamos como las actividades de mantenimiento pueden ser postergadas, lo cual no era el propósito. Para evitar esto se pueden introducir actividades muertas que marquen los días de intermedio entre estas operaciones, pero omitimos estas correcciones. Situaciones similares se pueden presentar en muchos proyectos, por ejemplo, el cemento necesita tiempo de curado, donde no se hace nada; los días feriados o de vacaciones son algo semejante. Estas actividades no tienen costo, pero tiene un tiempo fijo.

Si se han calculado todos esos tiempos, las actividades críticas se pueden caracterizar como aquellas en que TCI = TLI y TCF =TLF; esto es: las que carecen de flexibilidad para ser programadas.

La agenda de actividades se suele representar en un diagrama de barras horizontales conocido como tabla de Gantt, que de paso muestra las flechas entre las actividades. La barra se extiende según el número de días que toma la actividad, desde la fecha de inicio TCI hasta la fecha de finalización TCF. Esta tabla es muy ilustrativa si se despliega en un papel ancho, tipo calendario, pero no se acomoda fácil al papel usual, por lo que la omitimos en este trabajo.

Conclusión

Los grafos de actividades se pueden extender a todo tipo de tareas, ayudando a la visualización de las tareas en paralelo. De alguna manera, los humanos tenemos tendencia a ver los problemas de forma lineal, mientras su solución óptima en tiempo y costos es en paralelo. La visualización de actividades en paralelo debe ayudar a razonar y encontrar nuevos algoritmos en todas las facetas de la actividad humana, en especial en matemáticas y computadoras. Para ello la teoría de grafos resulta ser una herramienta invaluable.

Bibliografía

Chartrand, Gary and Ortrud Oellerman: "Applied and Algorithmic Graph Theory". New York: Mac Graw Hill, 1993.

Walker, Rusell C.: "Introduction to Mathematical Programming", 2nd Ed. New York: Custom Publishing, 2008.

Méndez, Yohaira, "Grafos de actividades y caminos críticos en la programación curricular escolar", Proyecto Creativo de MA, San Germán: Universidad Interamericana, 2009.

Crespo, Julia, "Aplicación de grafos en proyectos de construcción", Proyecto Creativo de MA, San Germán, Universidad Interamericana, 2010.

W.H. Freeman and Company, "For All Practical Purposes, Introduction to Contemporary Mathematics". <u>Critical Path Analysis</u>. 4th Ed. 1996.

Álvaro Lecompte Montes, Dr. Rer. Nat., obtuvo el grado de Doctor en Ciencias Naturales en Física, de la Universidad de Viena, Austria, en 1983. Se dedica a la Física Teórica y Matemáticas Aplicadas. Es Catedrático Asociado del Departamento de Matemáticas y Ciencias Aplicadas de la Universidad Interamericana de Puerto Rico, Recinto de San Germán. (alecompte@sg.inter.edu)