UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
Red Universitaria de Jalisco

OPERACIONES CON FRACCIONES

Resolución de Problemas Matemáticos
Unidad 2

Yago Ezzon Zapata Vaca
Septiembre 2020

UDGVIRTUAL® FORMACIÓN INTEGRAL

Todos los días tratamos con fracciones, cuando dividimos la cuenta en un café, seguimos las instrucciones de alguna receta, decimos la hora o incluso cuando contamos las porciones y calorías de la comida.

Las fracciones nos permiten expresar, como su nombre lo indica, las partes de un todo o también la proporción entre dos cantidades. Enseguida, se revisarán sus operaciones básicas.

SUMA Y RESTA

Sean a, b, c y d cuatro números enteros. Con ellos expresamos la siguiente suma:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{b \times d}$$

Donde a y c son los numeradores, y los denominadores b y d son enteros diferentes de cero:

$$(b, d \neq 0)$$

De manera análoga puede efectuarse la resta entre fracciones:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{b \times d}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1 \times 3 + 2 \times 4}{4 \times 3} = \frac{11}{12}$$

Siempre que sea posible encontrar divisores comunes entre numerador y denominador, trataremos de encontrar el mayor de ellos y lo llamaremos máximo común divisor (m.c.d).

Por ejemplo:

$$\frac{21}{24} = \frac{7 \times 3}{8 \times 3} = \frac{7}{8} \times \frac{3}{3} = \frac{7}{8}$$

Donde los divisores de 21 son 1, 3 y 7, en tanto que 24 es divisible entre 1, 2, 3, 4, 6, 8 y 12. Por lo tanto, el máximo común divisor es 3.

Entonces, dividimos numerador y denominador entre 3, y expresamos la nueva fracción en términos de los residuos, que son 7 y 8.

En el ejemplo, antes de expresar directamente el resultado, se muestra la multiplicación del divisor por el residuo de (7x3) y (8x3), que da como resultado el numerador y denominador originales. Nótese que en el paso intermedio se cancela el 3 del numerador con el del denominador.

Esto puede entenderse con mayor claridad si se piensa en 7/8 como un sólo número que primero es multiplicado por 3 y después dividido por tres, o simplemente multiplicado por 3/3, que es equivalente a multiplicar por 1.

EJEMPLO

Observa la siguiente suma de fracciones:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{27} = \ ?$$

¿Cuál es el procedimiento para su resolución?

Se podría hacer uso de la definición proporcionada antes para efectuar la suma, sin embargo, en este ejemplo y en otros con denominadores grandes o con sumas de tres o más fracciones es mucho más sencillo encontrar el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores.

En este ejemplo tenemos 12 y 27, cuyos múltiplos son:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$12 = 2^{2} \times 3$$

$$27 = 3^{3}$$

$$\text{m.c.m.} = 3^{3} \times 2^{2} = 108$$

Para calcular el m.c.m., tomamos los múltiplos con el mayor exponente, en este caso 2^2 y 3^3. El m.c.m. resulta ser 108, por lo tanto, reemplazamos los denominadores de la fracción original por 108 y ajustamos los numeradores de la siguiente manera:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{27} = \frac{9+4}{108} = \frac{13}{108}$$

Entonces, para determinar cuál es el numerador de cada fracción en la suma, vemos que, al calcular el m.c.m., multiplicamos:

$$3^3 \times 2^2 = 3 \times 3 \times 3 \times 2^2 = 108$$

Si $12 = 3 \times 2^2$

y $27 = 3^3$

Vemos que basta multiplicar $12 \times 3 \times 3 = 12 \times 9 = 108$

y $27 \times 2^2 = 27 \times 4 = 108$

Por lo tanto, si el denominador de 1/12 se multiplicó por 9 para obtener el m.c.m., debemos multiplicar el numerador por 9 para no alterar la fracción inicial, es decir, solo estamos expresando 1/12 en términos del m.c.m., ya que:

$$\frac{1}{12} = \frac{1 \times 9}{12 \times 9} = \frac{9}{108}$$

Y a continuación se repite el procedimiento con 1/27.

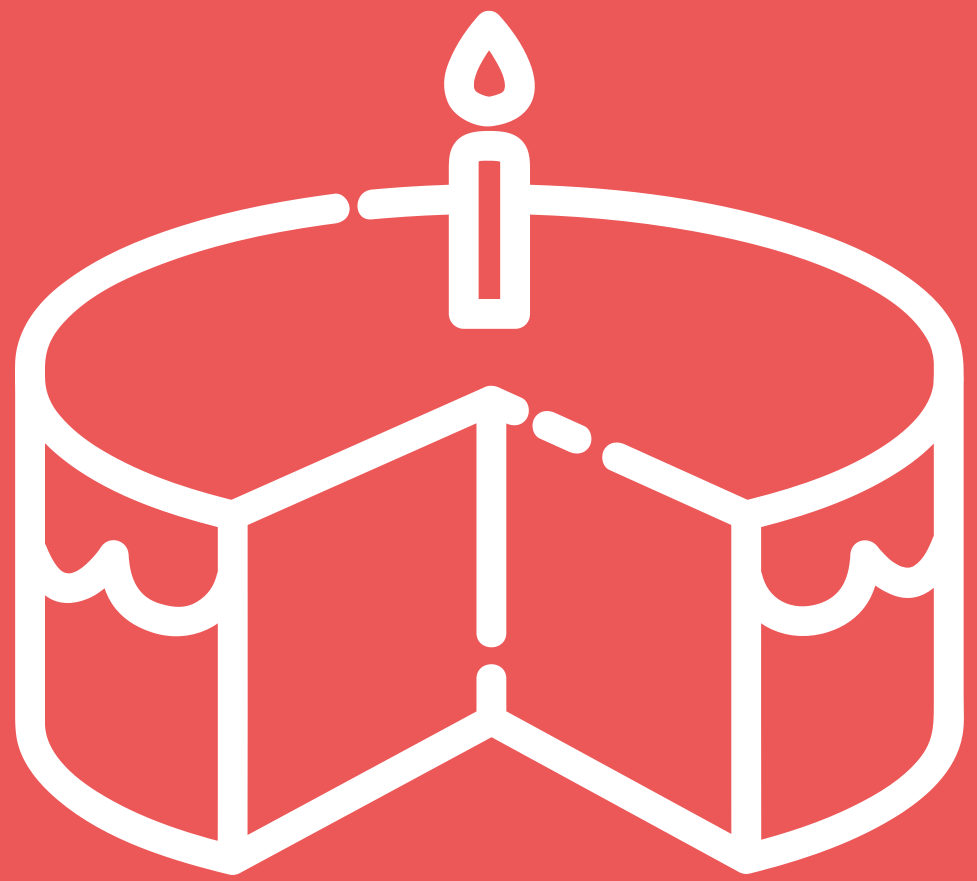
MULTIPLICACIÓN

Supongamos que dividimos un pastel por mitad y después dividimos una de esas mitades en 5 partes, entonces expresamos con fracciones el tamaño de cada una de estas rebanadas:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

En este ejemplo vemos que para calcular una multiplicación basta multiplicar el numerador por el numerador, y el denominador por el denominador:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$



DIVISIÓN

Una división entre fracciones siempre puede verse como el producto de la fracción del numerador a/b por el recíproco o inverso de la fracción del denominador d/c.

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Si retomamos el ejemplo del pastel, vemos que lo que se dice es que se divide 12 entre 5, esto es:

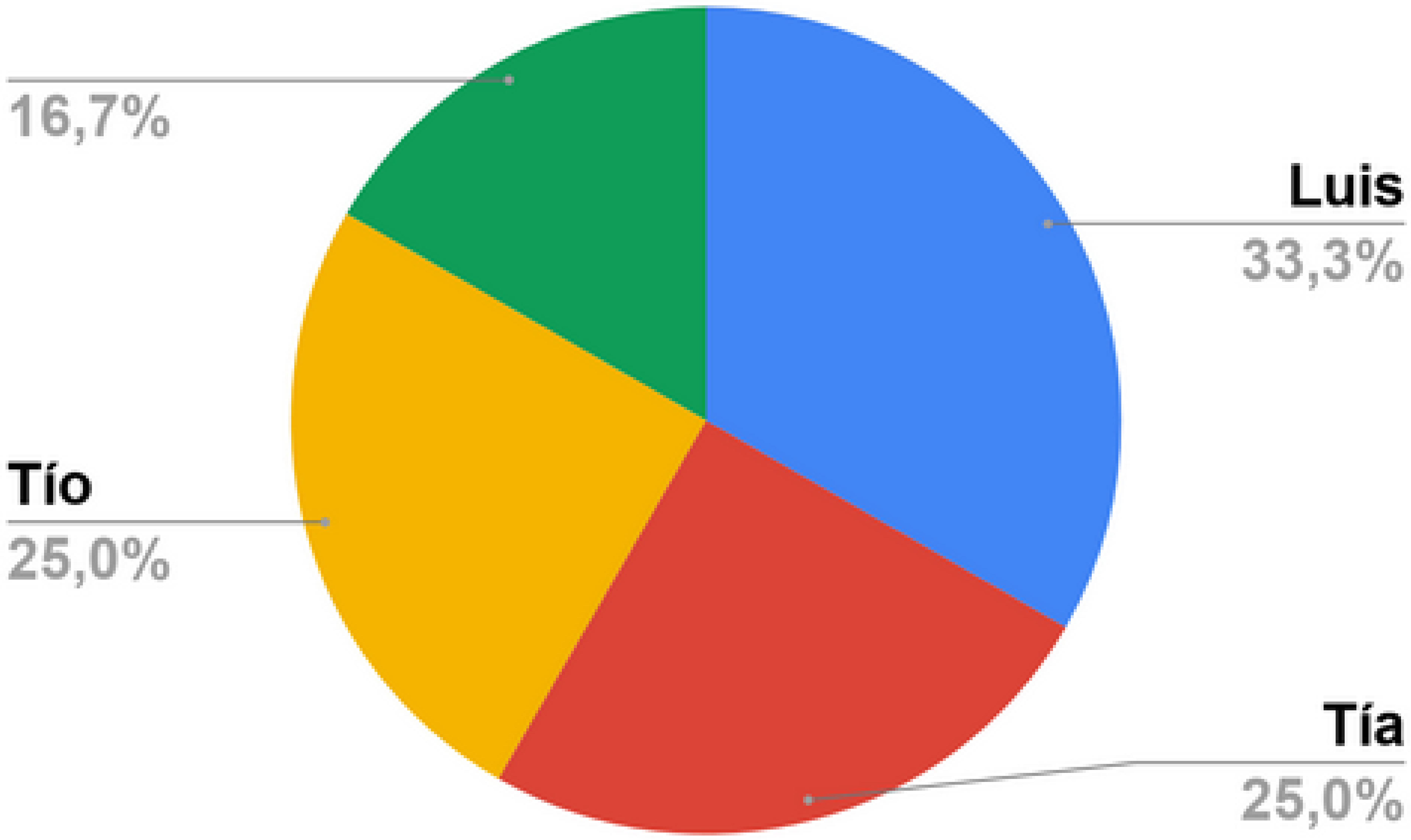
$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{5}{1}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

Donde se ha escrito 5/1 en lugar de 5 para conservar la forma de la definición.

EJEMPLO

En una fiesta se repartió un pastel con forma cilíndrica. El primero en repartir el pastel fue el cumpleañero, quien cortó 5 rebanadas iguales. Posteriormente, su tía, quien continuó repartiendo el pastel, cortó también 5 rebanadas, todas del mismo tamaño pero un poco más pequeñas que las primeras 5.

Finalmente, su tío cortó otras 3 rebanadas, de igual medida cada una, pero más grandes. Si el cumpleañero repartió un tercio del pastel, y sus tíos un cuarto cada uno, y le sobra una rebanada a cada uno, ¿qué cantidad de pastel sobró en total?


16,7%
Luis
33,3%
Tío
25,0%
Tía
25,0%

Conocemos la porción del pastel que cortó cada uno y el número de partes en las que lo dividieron:

Luis partió 1/3, y lo dividió en 5 partes, entonces el tamaño de cada una de sus rebanadas es:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

Por lo tanto, si efectuamos la misma operación para las porciones repartidas por el tío y la tía, obtenemos, respectivamente:

$$\text{Tía:} \quad \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$\text{Tío:} \quad \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

Entonces, la suma de cada una de las rebanadas sobrantes da:

$$\begin{aligned} \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} &= \frac{4+3+5}{60} \\ &= \frac{12}{60} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Es decir, que del total del pastel solo se repartió:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4+3+3}{12}$$

$$= \frac{10}{12}$$

$$= \frac{5}{6}$$

Por lo tanto, 1/6 parte del pastel no se repartió, de manera que el total sobrante es:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6+5}{30}$$
$$= \frac{11}{30}$$

En este caso, el sobrante equivale a la suma de la parte del pastel que no se repartió más lo que no se consumió, aunque fue repartido.

Referencias

College Entrance Examination Board. (2018). PIENSE II Prueba de práctica. http://www.escolar.udg.mx/aspirantes/guia-piense-ii

College Entrance Examination Board. (2018). PIENSE II Guía de estudio. http://www.escolar.udg.mx/aspirantes/guia-piense-ii

Mancera, E., Basurto, E. (2018). Interacciones. Matemáticas I. Pearson Educación. https://multimedia.conaliteg.gob.mx/secundaria/?a=7

Sánches, E., Hoyos, V., Sáiz, F. (2018). Matemáticas 1. Patria. https://multimedia.conaliteg.gob.mx/secundaria/?a=7

UNAM. (2013). Apoyo académico para la educación media superior,. http://objetos.unam.mx/

Contenido elaborado por Yago Ezzon Zapata Vaca

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
Red Universitaria de Jalisco

UDGVIRTUAL® FORMACIÓN INTEGRAL

CC BY NC SA