



UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

Red Universitaria de Jalisco

 UDGVIRTUAL[®] FORMACIÓN INTEGRAL

GEOMETRÍA

Resolución de Problemas Matemáticos

Yago Ezzon Zapata Vaca
Septiembre 2020

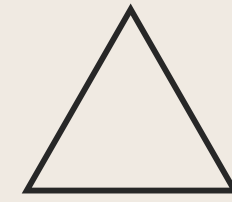
POLÍGONOS

Definición

Un polígono es una porción del plano limitada por líneas rectas. El menor número de líneas con el que se puede encerrar una porción del plano son tres, lo que da lugar a un triángulo.

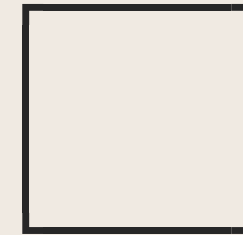


EL NOMBRE DE
CADA POLÍGONO
DE ACUERDO A SU
NÚMERO DE
LADOS ES:



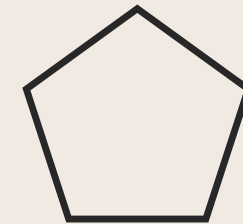
Triángulos

Rectángulos, acutángulos y obtusángulos.

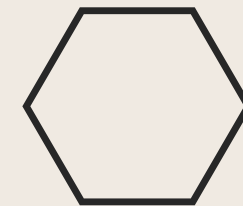


Cuadriláteros

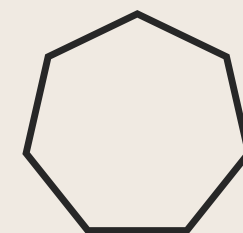
Cuadrado, rectángulo, trapecio



Pentágonos



Hexágono



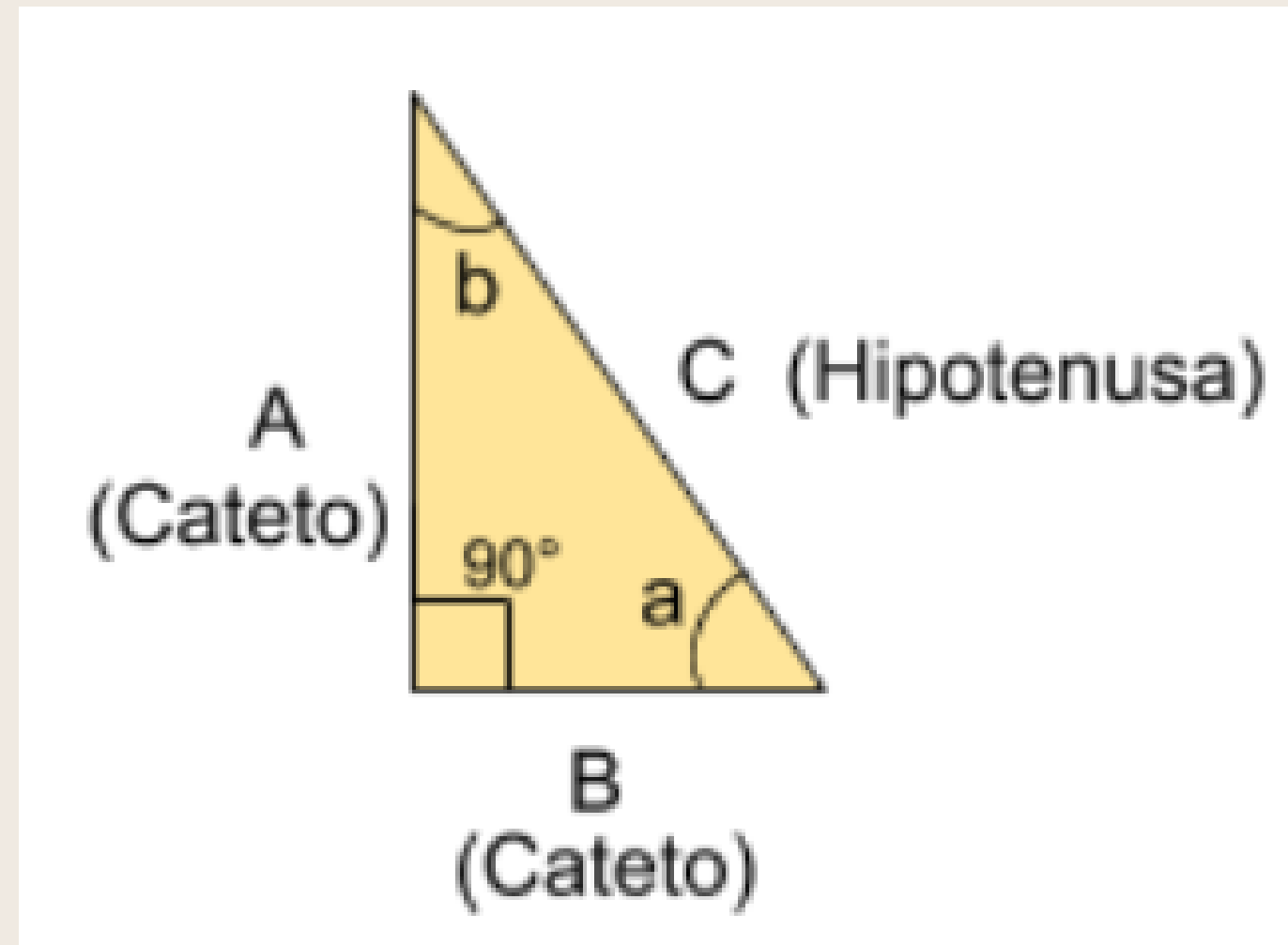
Heptágonos

Etcétera.



TEOREMA DE PITÁGORAS

El triángulo rectángulo posee un ángulo recto (de 90°) y dos ángulos agudos: a y b .



Si se conoce el ángulo 'a' se puede calcular el ángulo 'b', y viceversa, ya que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a 180° :

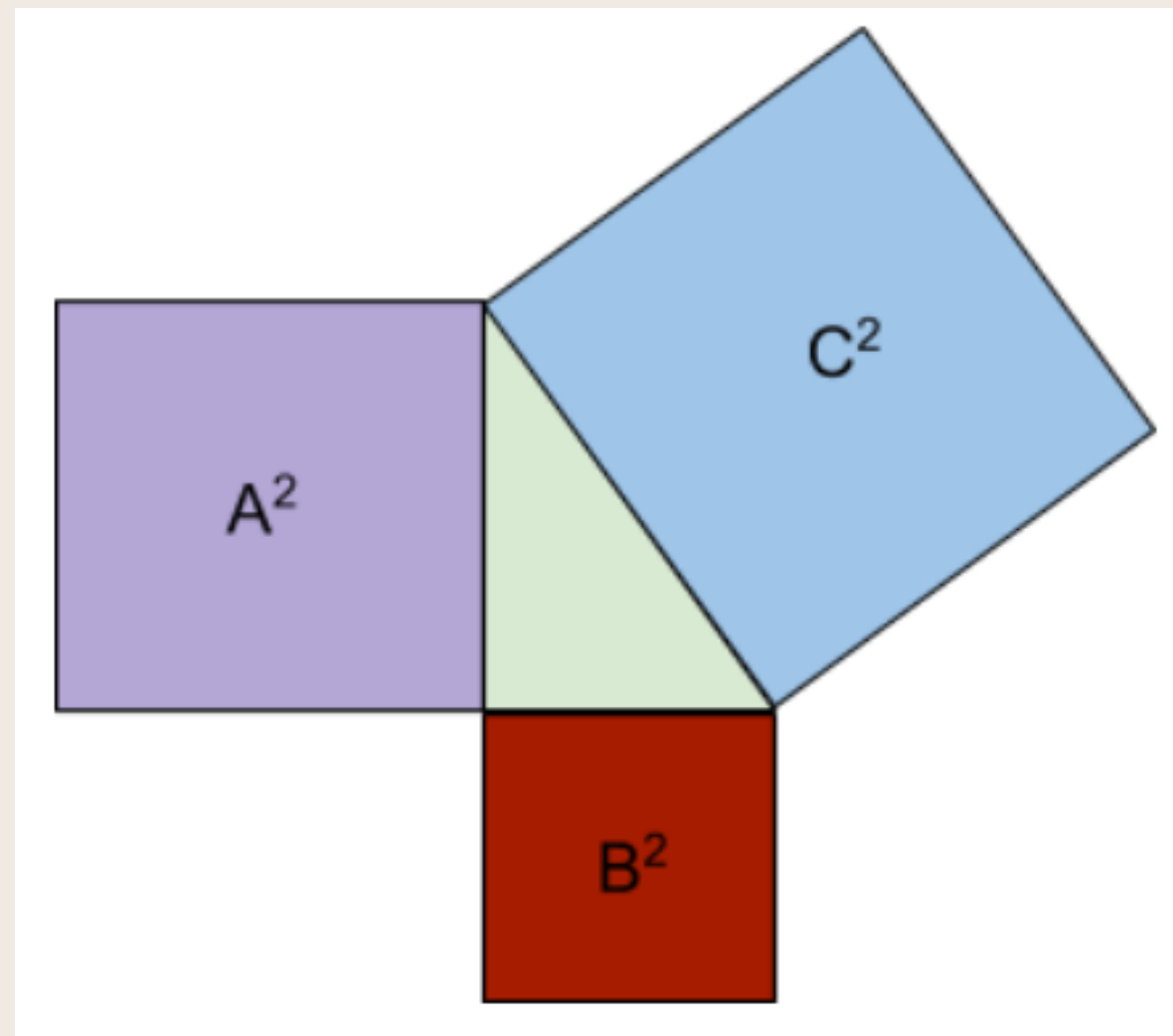
$$90^\circ + a + b = 180^\circ$$

En este caso: $a+b=90^\circ$, por lo que $a=90^\circ-b$, o $b=90^\circ-a$.



La relación que guardan sus lados se conoce como el

Teorema de Pitágoras, y es la siguiente: $C^2 = A^2 + B^2$



Esta figura ilustra dicho teorema y se puede apreciar que la suma del área del cuadrado rojo más la del cuadrado morado es igual al área del cuadrado azul.

PROCEDIMIENTO DE RESOLUCIÓN

Si se conoce el lado A y C y queremos saber cuánto mide el lado B, empleamos el teorema de Pitágoras:

$$C^2 = A^2 + B^2$$



Primero, despejamos B que es el lado que queremos calcular:

$$B^2 = C^2 - A^2$$

$$B = \sqrt{C^2 - A^2}$$

Entonces, si $A=3$ y $C=5$, sustituimos:

$$B = \sqrt{5^2 - 3^2}$$

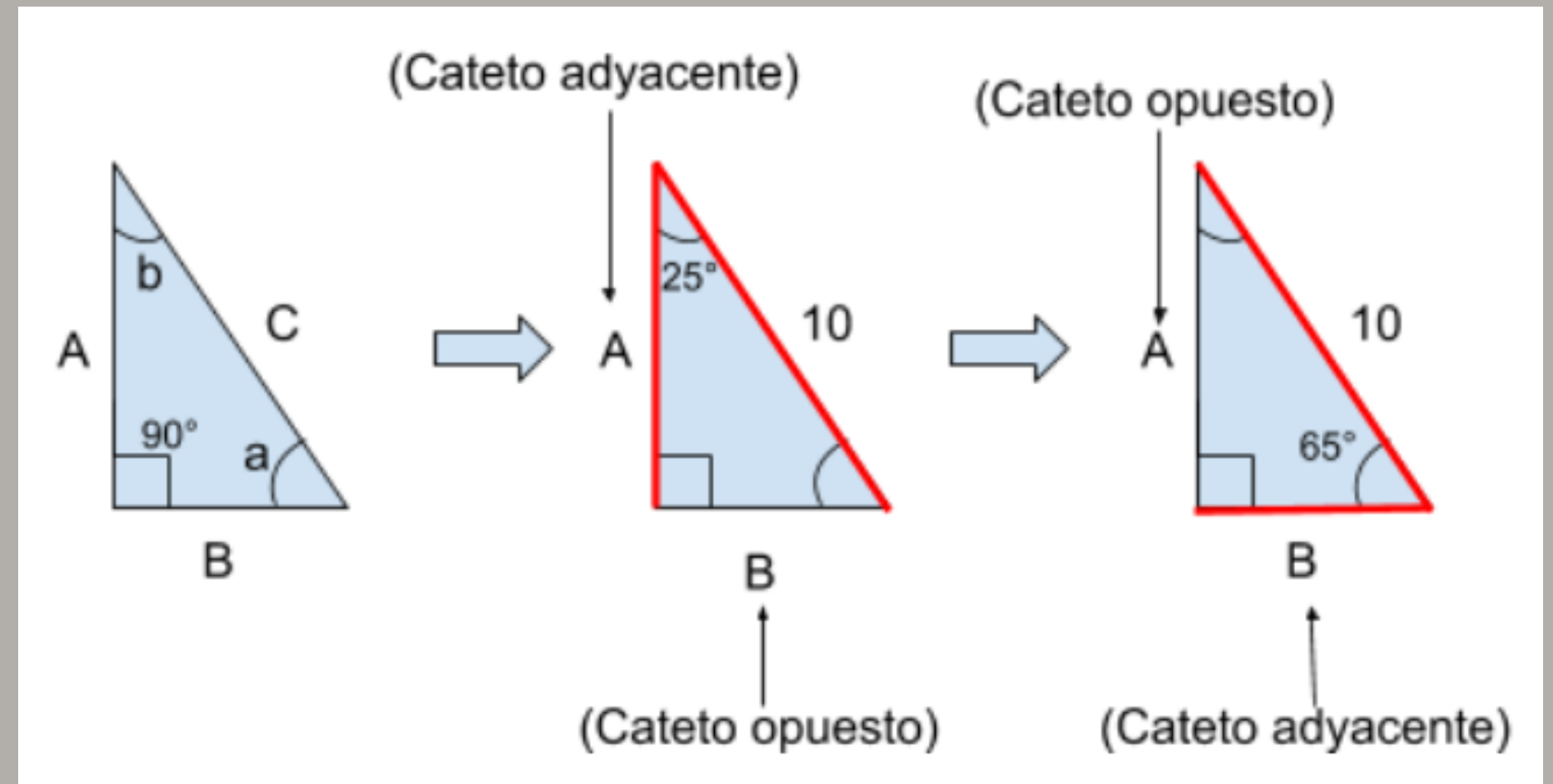
$$B = \sqrt{25 - 9}$$

$$B = \sqrt{16} = 4$$



FUNCIONES: SENO Y COSENO

Se puede obtener la longitud de cualquier lado si se sabe cuál es el ángulo entre este y otro lado cuya longitud sí conocemos. Por ejemplo:



Nota: Llamamos cateto opuesto al lado que está frente al ángulo que estamos tratando, y cateto adyacente al que está a un lado.



En la segunda imagen conocemos la longitud de la hipotenusa (el lado 'C') y el ángulo entre este y el cateto 'A' (el lado 'A'). Por lo tanto, podemos calcular tanto el lado 'A' como el lado B de la siguiente manera:

$$A = 10 \cos (25) = 9.06$$

$$B = 10 \operatorname{sen} (25) = 4.23$$

De la misma forma, con los datos de la tercera imagen, donde conocemos la longitud de la hipotenusa y el ángulo entre esta y el cateto 'B', podemos encontrar 'A' y 'B'.

$$A = 10 \operatorname{sen} (65) = 9.06$$

$$B = 10 \cos (65) = 4.23$$



Nota: Estas relaciones son válidas para cualquier triángulo.

En resumen, para un ángulo 'b' :

$$A = C \cos (b)$$

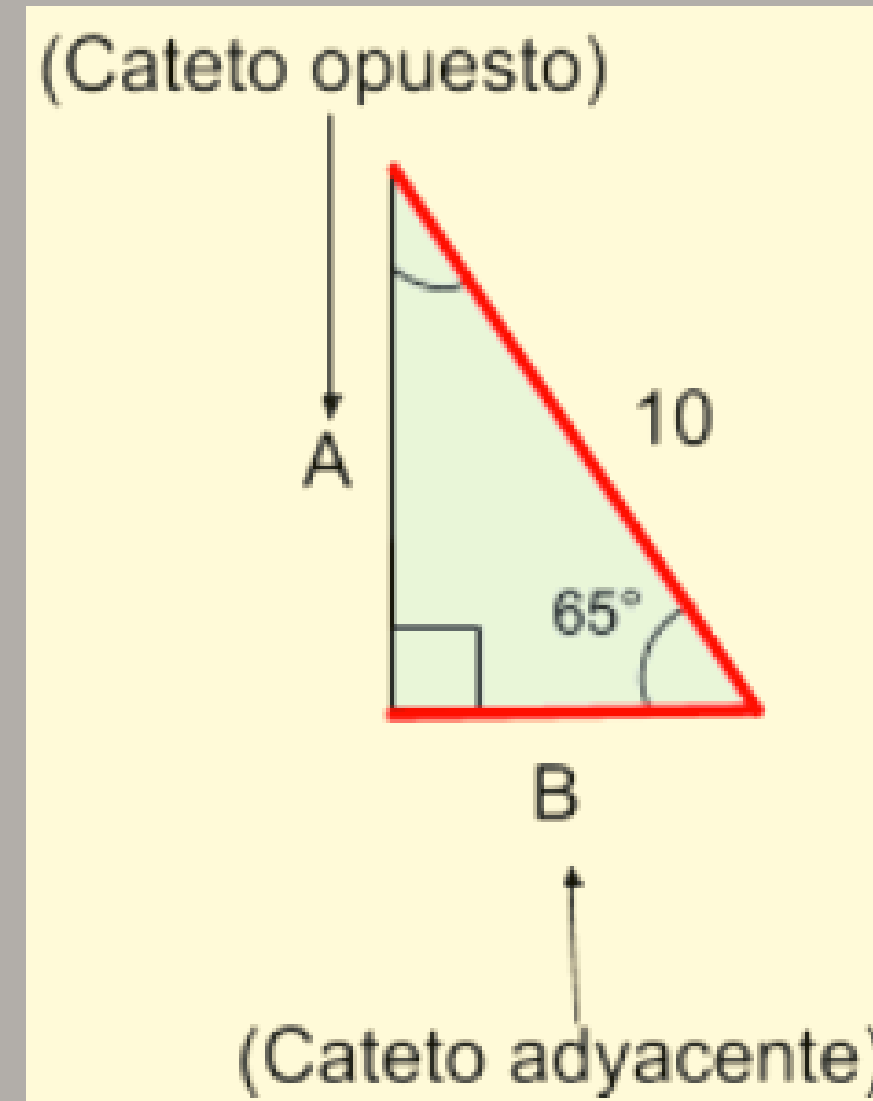
$$B = C \operatorname{sen} (b)$$

Si despejamos seno y coseno, obtenemos:

$$\cos (b) = \frac{A}{C}$$

$$\operatorname{sen} (b) = \frac{B}{C}$$

Donde A es el cateto adyacente y B es el cateto opuesto del ángulo 'b'.



En la figura, donde se especifica el ángulo 'a', el cateto adyacente a este ángulo es B y el cateto opuesto es A.

UNIDADES DE LONGITUD Y DE ÁREA

Hasta ahora hemos visto cómo se relacionan los lados y los ángulos de un triángulo. A partir de estos datos podemos determinar su área, la cual expresaremos en unidades cuadradas.

Ejemplo:

Si la base de un rectángulo mide cinco centímetros (5 cm) y la altura mide seis centímetros (6 cm), entonces al multiplicarlas tenemos:

$$b \times h = (5 \text{ cm})(6 \text{ cm}) = (5 \times 6) (\text{cm} \times \text{cm}) = 30 \text{ cm}^2$$

Donde multiplicamos las unidades de longitud de cada uno de sus lados y obtenemos las unidades de área que en este caso son cm.

De la misma manera, cuando calculamos el volúmen de un cubo de lado igual a 2 m, efectuamos la operación entre las unidades de longitud para obtener las unidades de volumen:

$$V = L \times L \times L = L^3$$

$$V = (2m) \times (2m) \times (2m) = (2)^3 (m)^3 = 8 m^3$$

En resumen, podemos tratar a las unidades como incógnitas, de modo que las operaciones de multiplicación y división aplican de la misma manera para ellas.



ÁREA DEL TRIÁNGULO

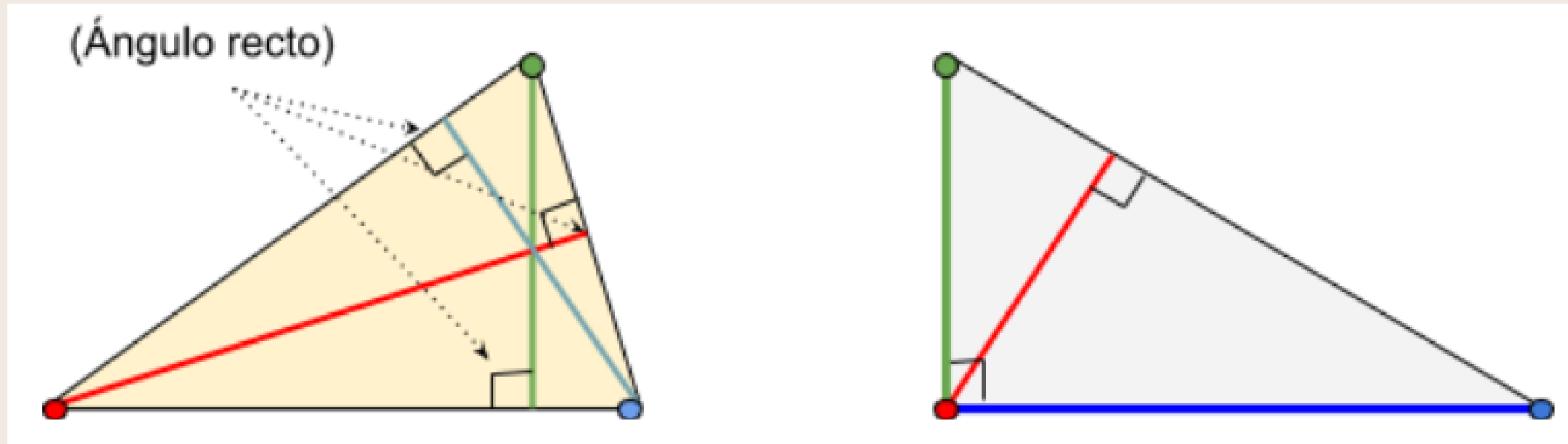
El área de un triángulo se calcula de la siguiente manera:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Donde b es la base y h es la altura del triángulo.

De manera general, todo triángulo tiene tres alturas, cada una de ellas correspondiente a la longitud de la recta que une uno de sus vértices con el lado opuesto a ese vértice y es perpendicular al lado opuesto.





En la imagen anterior se ilustra con un punto el vértice, y con una línea del mismo color la altura correspondiente.

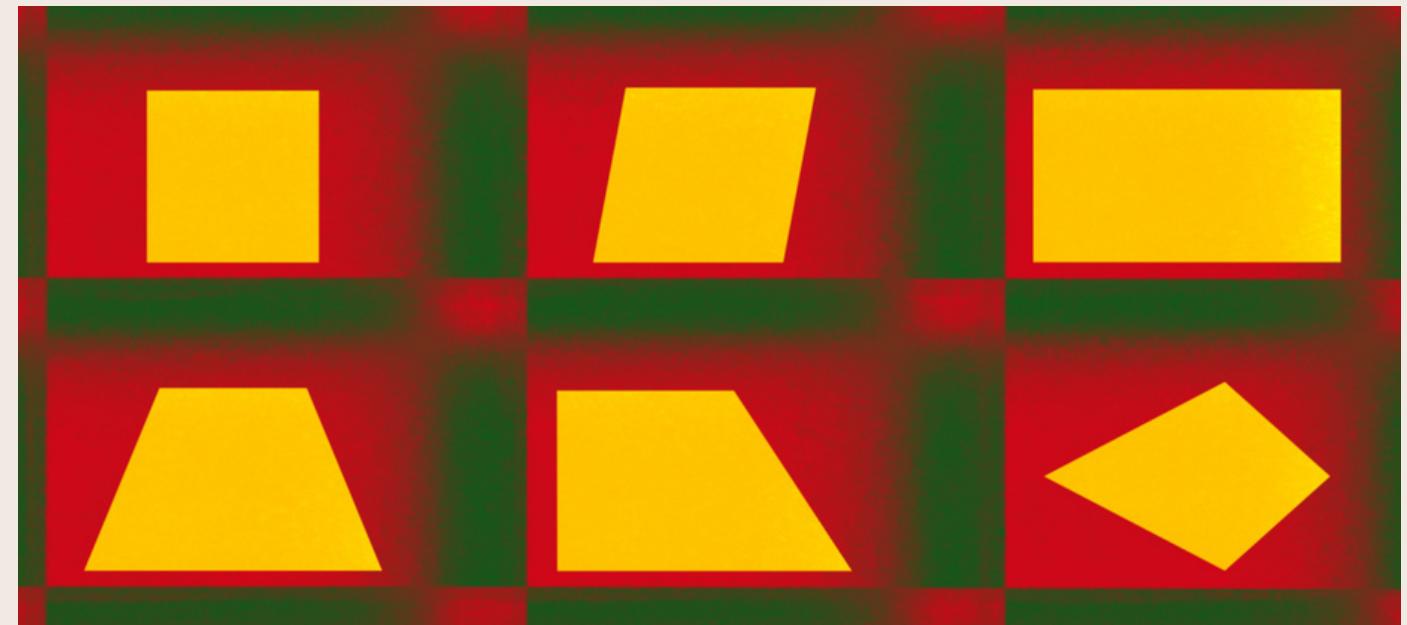
Como puede verse en la segunda figura, que es un triángulo rectángulo, dos de sus alturas corresponden a los catetos (las líneas verde y azul).

Nota: La base y la altura siempre son perpendiculares (forman un ángulo de 90°)



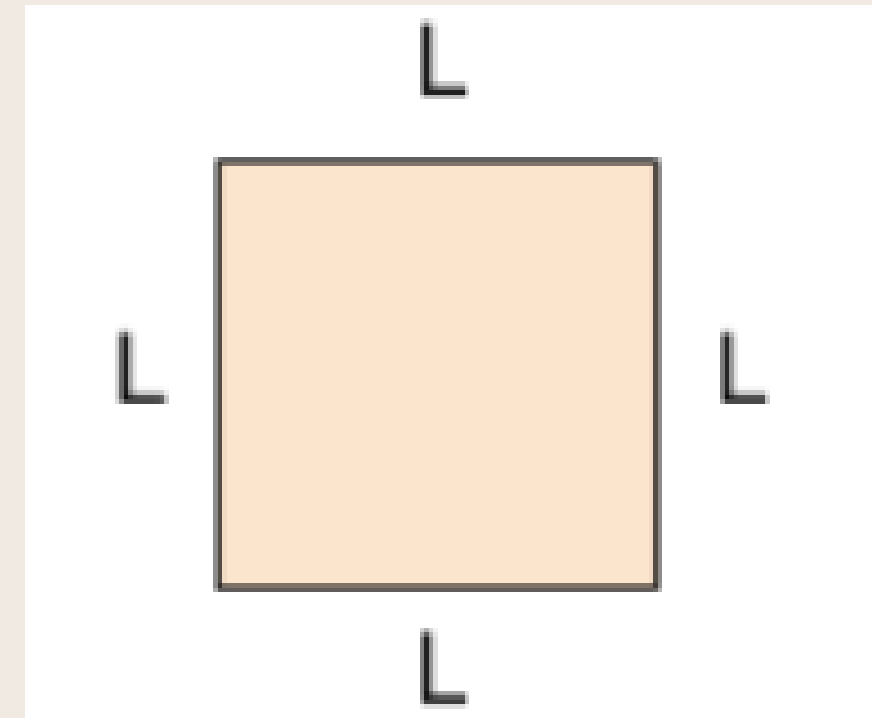
CUADRILÁTEROS

Los cuadriláteros son figuras compuestas de cuatro lados, y pueden ser regulares, esto es, con una proporción de ángulos y longitudes de sus lados definidas, o irregulares.



CUADRADO

En el cuadrado todos sus ángulos son de 90° y sus lados tienen longitudes iguales.



Podemos calcular el perímetro y el área de un cuadrado de la siguiente manera:

$$P = L + L + L + L = 4L$$

$$A = L \times L = L^2$$



EJEMPLO

Si el área de un cuadrado es 64, ¿cuál es la longitud de uno de sus lados?

Por la definición del área de un cuadrado sabemos que:

$$A = L^2$$

Por lo tanto:

$$L^2 = 64$$

Como vimos en la sección de potencias y radicales, si sacamos la raíz a ambos lados, obtenemos:

$$\sqrt{L^2} = \sqrt{64}$$

$$L = \sqrt{64}$$

$$L = 8$$



Por lo tanto, es un cuadrado de lado 8, cuyo perímetro es:

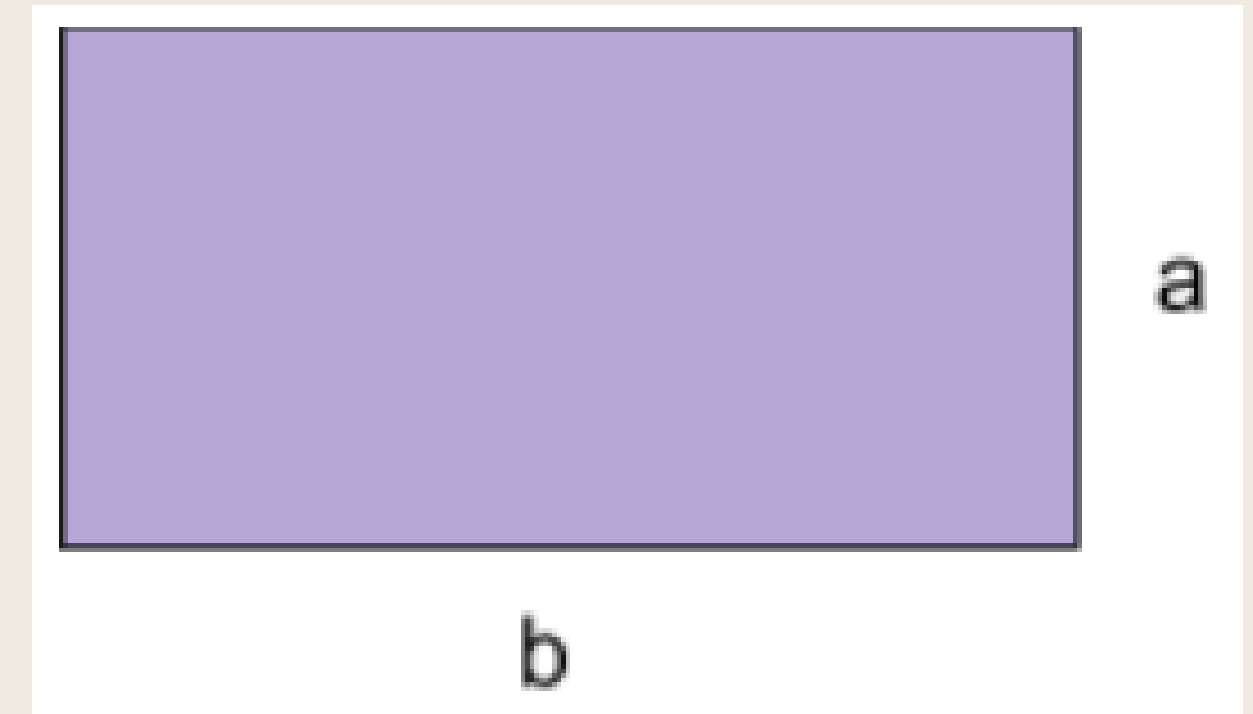
$$P = 4L = 4(8)$$

$$P = 32$$



RECTÁNGULO

El rectángulo, es una figura con dos pares de lados paralelos de diferente longitud:



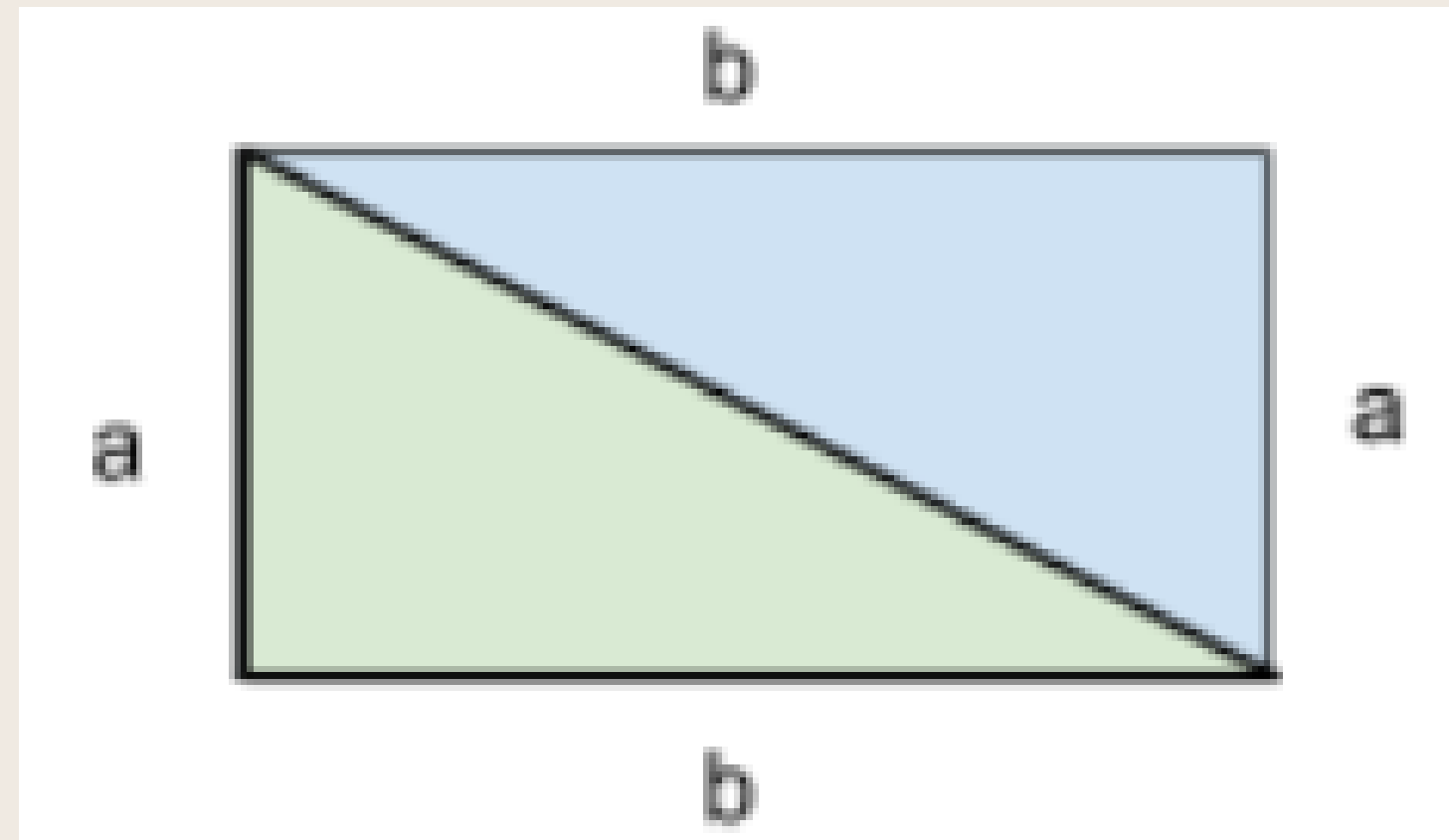
Podemos calcular el perímetro y el área de un rectángulo de la siguiente manera:

$$\text{Perímetro: } P = 2a + 2b = 2(a + b)$$

$$\text{Área: } A = a \times b$$

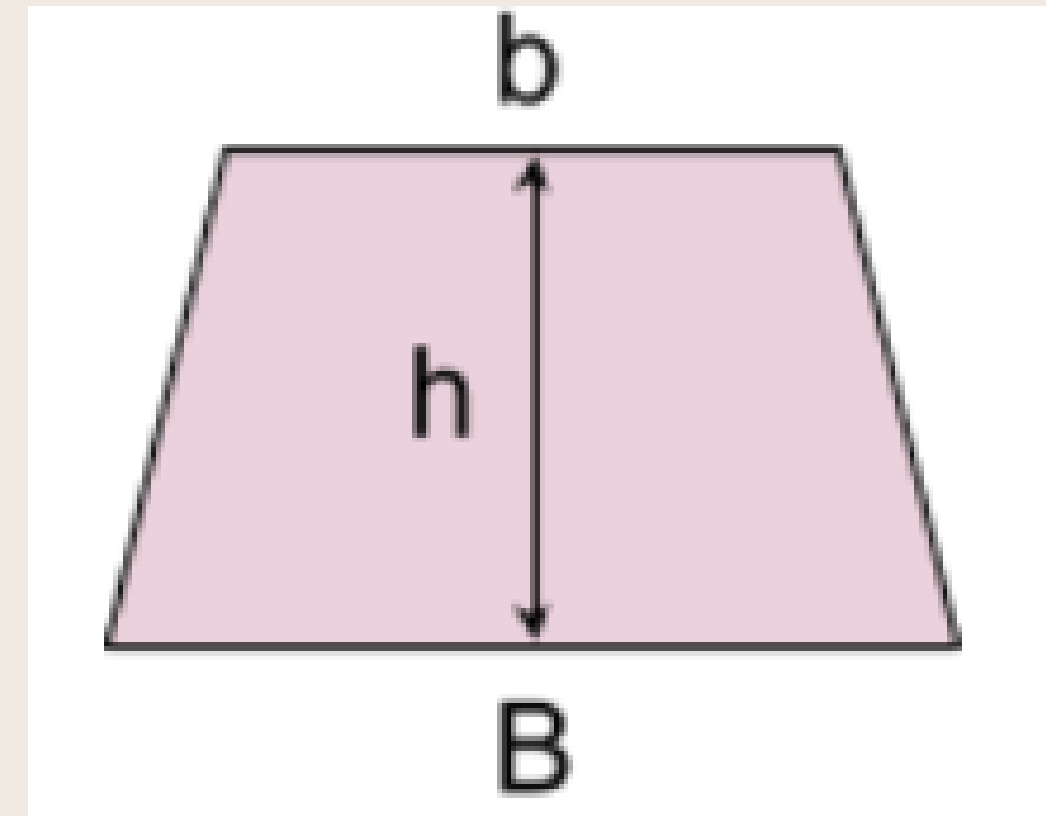


Si comparamos la definición del área del rectángulo con la del triángulo rectángulo, vemos que el área del rectángulo puede verse como la suma de dos triángulos rectángulos de base 'a' y altura 'b'.



TRAPECIO

El trapecio, a diferencia del rectángulo y el cuadrado, tiene ángulos internos diferentes a 90° . Dependiendo de sus ángulos internos se pueden catalogar de la siguiente manera:



Trapezio rectángulo: Tiene dos ángulos de 90° , un ángulo agudo y un ángulo obtuso.

Trapezio isósceles: Posee dos ángulos agudos y dos ángulos obtusos.

Trapezio escaleno: Todos sus ángulos internos son diferentes.



Podemos calcular el área de cualquier trapecio con la siguiente fórmula:

$$\text{Área : } A = \frac{b \times B}{2} \times h$$

En el caso del perímetro, se calcula sumando una por una las longitudes de sus lados, ya que todas son diferentes.



EJEMPLO

Si el área de un trapecio es 48, su base mayor es 6 y su base menor es 4, ¿Cuál es su altura?

Para encontrar la altura sólo necesitamos despejar 'h' de la definición del área y sustituir los valores conocidos.

Primero multiplicamos ambos lados por 2 y dividimos entre $b \times B$:

$$\left(A = \frac{b \times B}{2} \times h \right) \left(\frac{2}{b \times B} \right)$$

$$\left(\frac{2}{b \times B} \right) A = \left(\frac{b \times B}{2} \right) \left(\frac{2}{b \times B} \right) \times h$$

Donde $\left(\frac{b \times B}{2} \right) \left(\frac{2}{b \times B} \right)$ es igual a 1.



La multiplicación anterior puede verse como:

$$\left(\frac{b \times B}{2}\right) \left(\frac{2}{b \times B}\right) = \left(\frac{2}{2}\right) \left(\frac{b \times B}{b \times B}\right)$$

Así resulta más evidente que $2/2$ es uno, al igual que el producto $b \times B$ dividido por sí mismo.

Entonces, si ese término se vuelve 1, la ecuación es:

$$\left(\frac{2}{b \times B}\right) A = h \quad \text{o} \quad h = \left(\frac{2}{b \times B}\right) A$$

Sustituyendo los valores de las bases y el área:

$$h = \left(\frac{2}{4 \times 6}\right) (48)$$

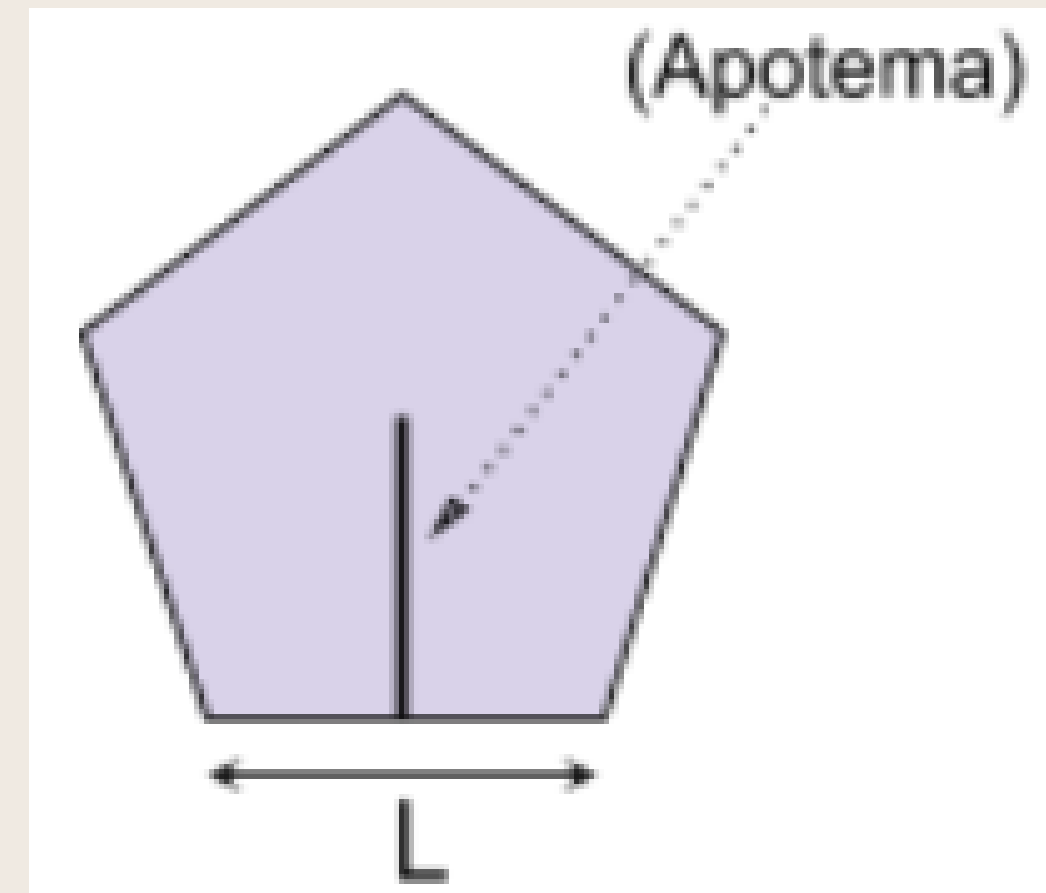
$$h = 4$$



POLÍGONOS REGULARES DE MÁS DE CUATRO LADOS

El área de polígonos regulares como los pentágonos, hexágonos, heptágonos, y de más lados, puede encontrarse conociendo la longitud de uno de sus lados y el apotema.

$$A = \frac{P \times A_p}{2}$$



El apotema (A_p), como se ilustra en la imagen, es la distancia que hay entre el centro del polígono y el punto medio de una de sus caras. "P" es el perímetro. →

EJEMPLO

Si el apotema de un octágono regular es igual a 5 y uno de sus lados es igual a 6, ¿Cuál es el área del octágono?

Ya que el perímetro es igual a la longitud de un lado multiplicado por el número total de lados:

$$P = 8L = 8(6) = 48$$

Por último sustituimos el perímetro en la fórmula del área:

$$A = \frac{48 \times 5}{2}$$

$$A = 120$$



Referencias

College Entrance Examination Board. (2018). PIENSE II Prueba de práctica.
<http://www.escolar.udg.mx/aspirantes/guia-piense-ii>

College Entrance Examination Board. (2018). PIENSE II Guía de estudio. <http://www.escolar.udg.mx/aspirantes/guia-piense-ii>

Mancera, E., Basurto, E. (2018). Interacciones. Matemáticas I. Pearson Educación.
<https://multimedia.conaliteg.gob.mx/secundaria/?a=7>

Sánchez, E., Hoyos, V., Sáiz, F. (2018). Matemáticas 1. Patria. <https://multimedia.conaliteg.gob.mx/secundaria/?a=7>

UNAM. (2013). Apoyo académico para la educación media superior.,
<http://objetos.unam.mx/>

Contenido elaborado por Yago Ezzon Zapata Vaca



UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
Red Universitaria de Jalisco

UDGVIRTUAL[®] FORMACIÓN INTEGRAL

